ネイピア数について

(Ⅰ)　級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ の収束・発散について

$s_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$　とする。$\{s_n\}$が単調に増加することは明らかである。

$$s_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^n<3$$

$$\left(\because\ \ k\geqq 2 \text{ のとき } k!=k(k-1)(k-2)\ \cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\geqq \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2\cdot 2}_{n-1\text{個}}\cdot 1=2^{n-1}\right)$$

$\{s_n\}$は，上に有界[※1]で単調増加するので収束する。

（この定理については証明せずに用いることにする。証明は難しいが，ε-δ論法による極限の定義で証明する。）

この極限値を e で表す。定数 e は**ネイピア数**[※2]（Napier's Number，自然対数の底）と呼ばれる無理数である。

（無理数であることの証明は，テーラーの定理を利用するのが一般的である。）

(Ⅱ)　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の収束・発散について

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とする。

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k$，$f_n(k)={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k$ とおくと，

$$f_n(k)=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\leqq\frac{1}{k!}\quad(k\geqq 1)$$

$1-\frac{i}{n}<1-\frac{i}{n+1}$　$(1\leqq i\leqq k-1)$　より，$f_n(k)<f_{n+1}(k)$

$$\therefore\quad a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}f_{n+1}(k)=\sum_{k=0}^{n}f_{n+1}(k)+f_{n+1}(n+1)>\sum_{k=0}^{n}f_n(k)=a_n$$

また，$a_n=\sum_{k=0}^{n}f_n(k)\leqq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<e$　…①

$\{a_n\}$は単調増加で上に有界だから収束する。実は，この数列の極限値は e に等しい。すなわち，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ である。証明は少し難しくなるので，ここでは省略する。

※1　すべての自然数 n に対して，$a_n\leqq M$（$a_n\geqq M$）を満たす定数 M が存在するとき，数列$\{a_n\}$ は**上に**（**下に**）**有界**であるといい，上にも下にも有界であるとき，単に**有界**であるという。

※2　e はオイラーが使い始め，ネイピアが対数を発見したことからその名が付けられている。